УДК 550.831+838

Про розв'язання задачі Алексідзе

© Ю.І. Дубовенко, 2009

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Надійшла ______ серпня 2009 р.

Представлено членом редколегії В.І. Старостенком

Нелінійна гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа постулює аналітичне продовження сили тяжіння в глобальних областях. Вказано алгоритм її розв'язання – визначення густини простого шару з інтегрального рівняння Фредгольма з регуляризацією підінтегральних похідних збурювального потенціалу.

The nonlinear boundary Alexidze problem for Laplace's equation postulates the gravity analytical prolongation in global areas. An algorithm of its solution is pointed out as a calculation of simple layer density from the Fredholm integral equation with the regularization of subintegral derivatives of the disturbing potential.

Нагальність вирішення нелінійної граничної задачі Алексідзе постульована непридатністю наявних схем відновлення потенціалу в глобальній області. В рамках геогустинного моделювання регіональних структур слід розв'язувати задачу аналітичного продовження аномалій сили тяжіння [Дубовенко, 2009а].

Нелінійна гранична задача Алексідзе [Дубовенко, 2009а; Дубовенко, 2008] для рівняння Лапласа означає – знайти функцію $W(x),\ x \in y^+$, яка задовільняє всередині необмеженої замкнутої області $\bar{y}^+ = y^+ \cup \partial y$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x) = 0,\ x \in y^+$, а в точках ляпуновської межі ∂y області і на нескінченності – умовам: $\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}\right)^2 = g^2(x),\ x \in \partial y,\ W(x) \to 0,\ |x| \to \infty$, де $g(x) = |-\nabla W(x)| = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = (\bar{g}(x), \bar{n}(x))$ – задана неперервна функція, y^- – обмежена область з масами Землі, y^+ – її необмежене доповнення без мас, ∂y – межа y^- і y^+ на поверхні Землі.

Гармонічну в області y^+ функцію $W(x),\ x \in y^+$ відшукують як потенціал простого шару [Чорний, 1995; Дубовенко, 2010] з невідомою густиною $\sigma(x),\ x \in \partial y$ (інтегрованою, а загалом більш гладкою), поширеною на поверхні Ляпунова ∂y. Рівняння, з якого відновлюють невідому густину $\sigma(x)$ за заданими на поверхні ∂y значеннями модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ) $g(x)$, виведено, виходячи із аналітичного зображення сили тяжіння [Дубовенко, 2009б]:

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2}\iint_{\partial y}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)\,dS_\eta dS_\xi\ , \qquad (1)$$

де одиничні вектори p і q, спрямовані відповідно з точки x в точки ξ і η, що пробігають поверхнею ∂y, мають вигляд $p_i = \cos(p, x_i) = \frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|}$, $\quad q_i = \cos(x_i, q) = \frac{x_i - \eta_i}{|x-\eta|}$, а кут між векторами – $\cos(p,q) = \sum_{i=1}^{3}\cos(p,x_i)\cos(x_i,q) = \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|}\frac{x_i-\eta_i}{|x-\eta|}$.

Аналітичні властивості функції МГПСТ $g(x)$ характеризуються негармонічністю [Алексидзе, 1985], неперервністю на поверхні Ляпунова [Дубовенко, 2009а] і розривністю при її перетині, про що свідчать такі твердження.

Лема 1. МГПСТ не задовільняє рівнянню Лапласа в жодній точці області y^+.

Лема 2. МГПСТ простого шару неперервний для будь-якої точки $x \in \partial y$, яка рухається поверхнею ∂y Ляпунова.

Лема 3. МГПСТ простого шару, поширеного на сфері радіуса ρ з одиничною поверхневою густиною $\sigma(x) = 1,\ x \in \partial y$, дорівнює

$$g^2(x)=\frac{1}{16\pi^2}\iint_{\partial y}\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi=\begin{cases}\rho^4/|x|^4, & |x|>\rho\\ 1/4, & |x|=\rho\\ 0, & |x|<\rho\end{cases}.$$

Отже, функція $g^2(x)$ розривна, має розрив неперервності *при переході* точки x через поверхню ∂y. Величина цього розриву при $\sigma(x)\equiv 1$, $x\in\partial y$ за умови $\frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}dS_\xi=\frac{1}{2}$ для сфери дорівнює $g_e^2(x)-g_0^2(x)=3/4$, $x\in\partial y$ [Дубовенко, 2009б].

Граничні дані задачі відновлення потенціалу за значеннями МГПСТ $g(x)=|-\nabla W(x)|$ у рамках прийнятої моделі [Дубовенко, 2009б] описує вираз

$$g^2(x)=g^2(x)\left\{1-2g^{-1}(x)\sum_{k=1}^{2}\cos(n,x_k)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}+g^{-2}(x)\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right)^2\right\}, \qquad (2)$$

або $g_i(x)=g_{i-1}(x)\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n,x_k)-g^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right]^2\right\}$, через те, що $\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_3}=0$.

За припущень [Дубовенко, 2009а] про нормальний потенціал $U(x)$ і потенціал притягання $W(x)=U(x)+T(x)$ для розв'язання задачі Алексідзе запропоновано такий узагальнений ітераційний алгоритм:

1. за знайденими попередньо наближеннями $\cos(n_i,x_k)=g_i^{-1}(x)W_k^{(i)}(x)$, $x\in\partial y$, $k=1,2,3$ напрямних косинусів нормалі $\bar{n}(x)$ визначаємо на межі ∂y за формулою (2) $i+1$-ше наближення сили тяжіння

$$g_{i+1}^2(x)=g(x)\left(\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n_i,x_k)-g_i^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right]\right)^{-1/2},\ x\in\partial y,$$

$$\cos(n_i,m)=\sum_{k=1}^{3}\cos(n_i,x_k)\cos(x_k,m),\ x\in\partial y,\ \Phi_{i+1}(x)=g_{i+1}(x)\cos(n_i,m)=\gamma(x)\cos(\nu,m),\ x\in\partial y;$$

2. знаходимо розв'язок зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\Delta T_{i+1}(x)=0,\ x\in y^+,\ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m}=\Phi_{i+1}(x),\ x\in\partial y,\ T_{i+1}(x)\to 0,\ |x|\to\infty, \qquad (3)$$

як потенціал простого шару мас неперервної густини $\delta_{i+1}(x)$, $x\in\partial y$, розподілених на поверхні ∂y:

$$T_{i+1}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{\delta_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi,\ x\in y^+; \qquad (4)$$

3. невідому густину обчислюємо з нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$\delta_{i+1}(x)+\int_{\partial y}K(x,\xi)\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi=2\Phi_{i+1}(x),\ x\in\partial y, \qquad (5)$$

де $K(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial m_x}\frac{1}{|x-\xi|}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(u,m)}{|x-\xi|}$, $\cos(u,m)=\sum_{k=1}^{3}\cos(m,x_i)\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|}$, $u=x-\xi$; при цьому виходимо з постулату [Бицадзе, 1976], що потенціал лише тоді буде розв'язком лінійного еліптичного рівняння 2-го порядку, коли його густина підкоряється інтегральному рівнянню Фредгольма 2-го роду, яке завжди має єдиний розв'язок в області y^- досить малої міри. Параметри цієї області визначають розв'язність задачі Алексідзе, а, відтак, і роздільну здатність (компетенцію) заснованого на ній методу, тому її визначення заслуговує окремої статті.

4. Розв'язавши рівняння (5), наближено обчислимо з використанням (4) похідні

$$W_j^{(i+1)}(x)=\frac{\partial W^{(i+1)}(x)}{\partial x_j}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j},\ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}=-\frac{1}{4\pi}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi,\ j=1,2,3, \qquad (6)$$

після чого знову повторюємо алгоритм, починаючи з 1-го пункту.

Зазначено [Дубовенко, 2009а], що похідні (6) визначаються у внутрішніх точках області y^+, а на межі ∂y їх *неможливо знайти* через неінтегровні особливості у підінтегральних функціях. Для здійснення обчислень слід знати значення похідних збурювального потенціалу саме на межі ∂y, і для їх обчислення потрібна спеціальна регуляризація інтегралів (6).

Загалом задача обчислення вищих похідних потенціальних функцій є некоректною і має два основні напрямки [Черный, Гольцев, 1980]:

1. виведення інтегральних зображень гармонічних функцій за значеннями її похідних на межі, що зводиться до вияснення умов диференційовності інтегралів, залежних від параметра (координат профілю) та їх чисельного інтегрування

2. вивчення диференціальних властивостей гармонічних функцій методами кінцевих різниць.

Регуляризація розбіжних інтегралів типу (6) зводиться до обчисленя коефіцієнтів у розкладанні за сферичними функціями за допомогою формули Гріна з граничним переходом від обмеженої замкнутої області y^- до необмеженої області y^+, де неперервність підінтегральної функції порушено. При цьому спочатку знаходять ті члени розкладання, які зумовлюють розбіжність поверхневих інтегралів, а потім їх віднімають з підінтегральної функції, після чого обчислюють остаточні значення похідних у заданій точці. При цьому отримані невласні інтеграли існують лише у смислі головного значення.

В застосуванні до (6) вищесказане означає, що потрібно функцію $\dfrac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}$ замінити різницею $\left\{\dfrac{\partial T_{i+1}(\xi,0)}{\partial x_j}-\dfrac{\partial T_{i+1}(x,0)}{\partial x_j}\right\}$, яка забезпечить збіжність інтегралу при $\xi = x$ і не порушить її на нескінченності (причому перший доданок задається відрізком розкладання $\dfrac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}$ в ряд Тейлора. Усі способи регуляризації розбіжних інтегралів (фактично – побудови деяких узагальнених функцій) відрізняються лише *сингулярними функціоналами*, зосередженими в особливих точках інтегрованої функції. Щоб уникнути розбіжності інтегралів типу (6), їх розбивають на дві частини, причому інтегрування на особливому інтегралі здійснюють за правилом граничного переходу:

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_3}=\lim_{\varepsilon\to 0} f\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{\varepsilon}^{\delta(x)}\sigma(\xi,x_2)(x_2-\xi)dx\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{d\eta}{|\xi-x_1|^3},\ \text{де}\ \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{d\eta}{|\xi-x_1|^3}=\frac{2}{(\xi-x_1)^2+(x_2-x_3)^2}-\frac{1}{a^2}.$$

Крім того, для прискорення збіжності інтегралів можна спеціально підібрати ядро оператора рівняння (6) на основі компактного розщеплення [Черный, Якимчик, 2001], яке є, по-суті, сумою двох ядер (ядра скінченного рангу та малого ядра); це розщеплення застосовне до рівнянь з компактним оператором.

Заміна коректної задачі (3) розв'язком граничної задачі (4-5) і збіжності наближень $W^{(k)}(x)$ до потенціалу притягання $W(x),\ x\in y^+$ обгрунтувана в [Дубовенко, 2009а, Дубовенко, 2010]. За неперервної на межі ∂y функції густини потенціалу простого шару (6) граничні значення частинних похідних потенціалу 1-го порядку дорівнюють [Дубовенко, 2010]

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k}=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{x_k-\xi_k}{|x-\xi|}\delta(\xi)dS_\xi+\frac{1}{2}\delta(x)\cos(x_k,m_x),$$

але для практичного обчислення похідних варто використовувати еквівалентну формулу

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}[\delta(\xi)-\delta(x)]\frac{x_k-\xi_k}{|x-\xi|}dS_\xi+\frac{1}{2}\delta(x)\cos(x_k,m_x).$$

Це нелінійне рівняння за фіксації геометрії контактної поверхні $\partial y(y)$ на класі Ляпунова $C^{(2)}(y^-)$ стає лінійним і має однозначне розв'язання. Невідому густину потенціалу простого шару обчислюють з нелінійного інтегрального рівняння сили тяжіння:

$$\frac{1}{4}\sigma^2(x)+\frac{\sigma(x)}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma(\xi)dS_\xi+\frac{1}{16\pi^2}\iint_{\partial y}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)dS_\eta dS_\xi=g^2(x),\ x\in\partial y. \quad (7)$$

Його розв'язок $\sigma(x),\ x \in \partial y$ еквівалентний розв'язку задачі Алексідзе з граничними даними на поверхні ∂y Ляпунова, оскільки за будь-якого вибору густини потенціал простого шару задовольняє в області y^+ рівнянню Лапласа, а знайдене з (7) значення густини забезпечує виконання граничної умови. Питання розв'язності задачі Алексідзе редукується до вияснення умов існування, єдиності і стійкості розв'язку рівняння (7). Це рівняння можна спростити до такого вигляду:

$$\sigma^2(x) + \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)\,dS_\eta\, dS_\xi = 2g^2(x),\ x \in \partial y. \qquad (8)$$

Розв'язки рівнянь (7, 8) допомагають визначати не лише потенціал $W(x),\ x \in y^+$, а й значення МГПСТ в будь-якій точці необмеженої області y^+ з (1), або за зручнішою для обчислень формулою $g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_{\partial y}\frac{x_k - \xi_k}{|x-\xi|^3}\sigma(\xi)\,dS_\xi\right)^2$, яка не вимагає обчислення двократного інтеграла.

Зведення задачі Алексідзе з граничними даними на поверхні Ляпунова до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь сили тяжіння (7, 8) дозволяє на їх прикладі легко вивчити питання розв'язності її розв'язків, і ефективно знаходити чисельні наближені розв'язки для областей складної форми [Дубовенко, 2010]. Для практичних обчислень послідовних наближень густини потенціалу простого шару за наведеним вище узагальненим алгоритмом доцільно застосувати такі ітераційні схеми:

1. $\sigma_{1,0}(x) = g(x),\ \sigma_{2,0}(x) = 0,\ x \in \partial y,\ \sigma_{1,n+1}(x) = \sigma_{1,n}(x) + \sigma_{2,n}(x),\ \sigma_{2,n+1}(x) = A_1[\sigma_{2,n}(x)],\ n = \overline{0,\infty}$,

де $A_1[\sigma_{2,n}(x)] = b(x;\sigma_{1,n}) - \int_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)\,dS_\xi$, $K_1(x,\xi;\sigma_1) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\partial y}\frac{\sigma_1(\eta)}{\sigma_1(x)}\frac{\cos(p,q)}{|x-\eta|^2}dS_\eta$,

$b(x;\sigma_1) = \frac{1}{\sigma_1(x)}\left(g^2(x) - F_1(x;\sigma_1)\right)$.

2. $\sigma_{1,0}(x) = g(x),\ \sigma_{2,0}(x) = 0,\ x \in \partial y,\ \sigma_{1,n+1}(x) = \sigma_{1,n}(x) + \sigma_{2,n}(x),\ \sigma_{2,n+1}(x) = A_2[\sigma_{2,n}(x)],\ n = \overline{0,\infty}$,

де $A_2[\sigma_{2,n}(x)] = b_1(x;\sigma_{1,n}) - \int_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)\,dS_\xi$, $b_1(x;\sigma_1) = \left(g^2(x) - F_1(x;\sigma_1) - F_1(x;\sigma_2)\right)/\sigma_1(x)$.

3. $\sigma_{2,n+1}(x) + \int_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n+1}(\xi)\,dS_\xi = b_1(x,\sigma_{1,n}),\ \sigma_{2,n}(x) = \sigma_{1,n+1}(x) - \sigma_{1,n}(x),\ n = \overline{0,\infty}$,

де $\sigma_{1,0}(x) = g(x),\ \sigma_{2,0}(x) = 0,\ x \in \partial y$.

Розв'язання *нелінійної* граничної задачі Алексідзе для відновлення потенціалу за значеннями МГПСТ означає відшукання потенціалу простого шару (4), густину якого відшукують з рівняння (5). Знаходити густину з еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння сили тяжіння (7) недоцільно, але воно зручне для вивчення умов коректності її постановки з граничними даними на класі поверхонь Ляпунова $C^{(2)}(y^-)$. На цьому класі задача Алексідзе редукована до розв'язання двох еквівалентних нелінійних інтегральних рівнянь (7, 8) сили тяжіння. У цих редукціях вона коректна на парі банахових просторів $B(y^+),\ B(\partial y)$, до яких належать вхідні дані і шуканий розв'язок.

Наступна стаття буде присвячена особливостям чисельних процедур за ітераційними схемами.

Дубовенко Ю.І. Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофіз. журнал. – 2009а. – **31**, № 6. – С. 132-139.

Дубовенко Ю.І. Спосіб відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Матер. наук. конф. „Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища", Львів, 6-10 жовтня 2008 р. – Львів: Сполом, 2008. – С. 156-158.

Чорний А.В. Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісник Київського університету. Сер. Геологія. – 1995. – Вип. 13. – С. 72-80.

Дубовенко Ю.І. Розв'язність задачі Алексідзе // Доп. НАНУ. – 2010, № 1. – С. .

Дубовенко Ю.І. Редукція задачі Алексідзе для рівняння сили тяжіння // Доп. НАНУ. – 2009б, № 12. – С. .

Алексидзе М.А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. – Тб.: Мецниереба, 1985. – 412 с.

Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.

Черный А.В., Гольцев В.С. О восстановлении производных гармонических функций, описывающих гравитационные или магнитные аномалии, по приближенно заданным их значениям в регулярной сети точек вещественной оси . II // Геофиз. журн. – 1980. – **2**, № 1. – С. 38-47.
Черный А.В., Якимчик А.И. О корректной разрешимости линейных интегральных уравнений 2-го рода с оператором, обладающим большим ядром // Доп. НАНУ. – 2001, № 1. – С. 144-147.